

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Вычислительная линейная алгебра
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Ю.П. Бибило, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 05.08.2025

Аннотация

Курс направлен на ознакомление студентов третьего курса со стандартными задачами вычислительной линейной алгебры (ВЛА) и, связанными с ними алгоритмами, оценками погрешностей вычислений и теоремами линейной алгебры. Эти задачи относятся к трем темам: решение линейных алгебраических систем с невырожденной квадратной матрицей (метод LU разложения, метод Холецкого), линейная задача наименьших квадратов (методы, связанные с вычислением QR разложения, сингулярные разложения), и сингулярные задачи (итерационные методы вычисления собственного значения, разложения Шура).

В рамках реализации дисциплины обеспечено разнообразие форматов и методов обучения: лекции, семинары с ИТ-практиками, конкурсы, хакатоны, кейс-чемпионаты, мастер-классы, командные проектные задания и другие формы активного взаимодействия в каждом семестре.

Кроме того, предусмотрено изучение кейсов и реальных задач, связанных с проектами по разработке, внедрению и развитию цифровых технологий и ИТ-разработок. Кейсы формируются на основе практического опыта индустриальных партнёров и используются как для изучения теоретических аспектов, так и для выполнения практических и проектных заданий в каждом курсе.

Курс базируется на знаниях, полученных при изучении дисциплины "Линейная алгебра", и является предшествующей для дисциплины "Машинное обучение".

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Дать представление об основных алгоритмах вычислительной алгебры и их обоснования.

Задачи дисциплины

- обучить студентов основным алгоритмам вычислительной линейной алгебры вместе с их строгим математическим обоснованием;
- научить оценивать достоинства и недостатки алгоритмов при решении задачи с точки зрения их точности и затратности;
- научить реализовывать эти алгоритмы в пакете Matlab.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные задачи, алгоритмы и теоремы вычислительной линейной алгебры.

уметь:

- применять алгоритмы вычислительной линейной алгебры;
- оценивать сложность и погрешность алгоритмов;
- реализовывать алгоритмы с помощью пакета Matlab.

владеть:

- навыком отыскания оптимального пути решения задачи;
- навыками оценки необходимых затрат машинного времени для решения поставленной задачи.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение.	3	3		3
2	Итеративные методы для решения линейных систем.	3	3		3
3	Линейные системы общего вида.	3	3		3
4	Линейные системы специального вида.	3	3		3
5	Метод наименьших квадратов.	3	3		3
6	Методы Крыловского типа.	3	3		3
7	Несимметричная проблема собственных значений.	3	3		3
8	Предобуславливание.	4	4		4
9	Симметричная проблема собственных значений.	5	5		5
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Введение.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Области применения вычислительной линейной алгебры. Классические задачи: решение систем линейных уравнений, вычисление собственных значений, метод наименьших квадратов. Библиотеки и пакеты (BLAS, LAPACK, NumPy, SciPy).

Индивидуальный проект: обзор библиотек вычислительной линейной алгебры и их возможностей.

Командный проект: создание учебного отчёта «Применение линейной алгебры в анализе данных и машинном обучении».

Мастер-класс: «Вычислительная линейная алгебра в индустрии: от симуляций до анализа больших данных».

2. Итеративные методы для решения линейных систем.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Методы простой итерации, метода Якоби, метода Гаусса–Зейделя. Условие сходимости. Практические аспекты реализации.

Индивидуальный проект: реализация метода Якоби для учебной системы линейных уравнений.

Командный проект: сравнение производительности итерационных методов на больших матрицах.

Мастер-класс: «Итерационные методы в инженерных расчётах и моделировании».

3. Линейные системы общего вида.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

LU-разложение, метод Холецкого. Устойчивость алгоритмов. Анализ ошибок.

Индивидуальный проект: реализация LU-разложения и сравнение с готовыми библиотечными функциями.

Командный проект: исследование устойчивости методов решения линейных систем при различных условиях задачи.

Мастер-класс: «LU и Cholesky-разложения в задачах моделирования физических процессов».

4. Линейные системы специального вида.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Разреженные матрицы. Блочные структуры. Специализированные алгоритмы решения.

Индивидуальный проект: реализация алгоритма решения разреженной системы с использованием библиотек SciPy.

Командный проект: разработка программы для решения задач с разреженными матрицами (например, теплопередача в сеточных моделях).

Мастер-класс: «Решение задач с разреженными матрицами в промышленных приложениях».

5. Метод наименьших квадратов.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Основы метода. QR-разложение, SVD. Применение к задачам аппроксимации и регрессии.

Индивидуальный проект: реализация метода наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных данных.

Командный проект: анализ реального датасета с применением метода наименьших квадратов и SVD.

Мастер-класс: «Метод наименьших квадратов в анализе данных и машинном обучении».

6. Методы Крыловского типа.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Методы сопряжённых градиентов, GMRES, BiCGSTAB. Особенности реализации и применения.

Индивидуальный проект: программная реализация метода сопряжённых градиентов для симметричных положительно определённых систем.

Командный проект: сравнение эффективности методов Крыловского типа для различных классов матриц.

Мастер-класс: «Методы Крылова в решении больших инженерных и научных задач».

7. Несимметричная проблема собственных значений.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Общая постановка. Методы степенной итерации, QR-алгоритм.

Индивидуальный проект: реализация степенного метода для поиска наибольшего собственного значения.

Командный проект: численный эксперимент: сравнение точности и сходимости степенного метода и QR-алгоритма.

Мастер-класс: «Численные методы для спектральных задач в реальных приложениях».

8. Предобуславливание.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Идея предобуславливателей. Улучшение сходимости итерационных методов.

Индивидуальный проект: исследование влияния различных предобуславливателей на скорость сходимости метода сопряжённых градиентов.

Командный проект: разработка программы для сравнения предобуславливателей (диагонального, неполного LU и др.) на тестовых задачах.

Мастер-класс: «Предобуславливание в задачах больших размерностей: опыт применения в промышленности».

9. Симметричная проблема собственных значений.

Форматы обучения: Лекции, интерактивные семинары, разбор кейсов, проектные практикумы, мастер-классы, групповые обсуждения.

Индивидуальный проект: реализация метода Якоби для нахождения собственных значений симметричной матрицы.

Командный проект: исследование точности и скорости методов для симметричных задач на примерах из физики или механики.

Мастер-класс: «Собственные значения и векторы в инженерных расчётах и анализе данных».

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Для проведения занятий по дисциплине «Вычислительная линейная алгебра» используется учебная аудитория, оснащённая современными средствами обучения: мультимедийным проектором, экраном, звуковой системой, а также компьютерной техникой с доступом к сети Интернет.

Студенты имеют возможность работать с лицензионным и открытым программным обеспечением, необходимым для выполнения вычислительных и исследовательских заданий: промышленными библиотеками линейной алгебры (BLAS, LAPACK), научными пакетами и инструментами (MATLAB, Octave, NumPy, SciPy), а также специализированными средами программирования (Python, C/C++, Julia).

В образовательном процессе активно применяются облачные сервисы для выполнения вычислительных экспериментов (Google Colab, JupyterHub), платформы для совместной работы и хостинга Git-репозиториях (GitHub, GitLab), а также SAAS-сервисы для организации проектной деятельности, кейсов и хакатонов.

Материально-техническая база полностью соответствует требованиям дисциплины и обеспечивает возможность сочетать теоретическую подготовку с практическими вычислительными экспериментами, командными проектами и решением прикладных задач, включая примеры от промышленных партнёров.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Фонд базовой кафедры:

1. Линейная алгебра и некоторые ее приложения [Текст] : учебное пособие для вузов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / Л. И. Головина .— М. : Наука, 1971 .— 288 с.
2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Мир, 1999. — 548 с.
3. Saad Y. Numerical Methods for Large Scale Eigenvalue problems. 1992. — 358 p. [имеется в библиотечном фонде кафедры]
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Мир, 2001. — 435 с.
5. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2003. — 528 с. [имеется в библиотечном фонде кафедры]

Дополнительная литература

Фонд базовой кафедры:

Матричные вычисления [Текст] = Matrix Computations : [учеб. пособие для вузов] / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун ; пер. с англ. Ю. М. Нечепуренко и др. ; под ред. В. В. Воеводина. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. — М.: Мир, 2001.

Трефетен Л.Н., Баухауз Д. Численные линейные алгебраические методы. — М.: Физматлит, 2004.

Головин С.В. Численные методы линейной алгебры. — М.: МГУ, 2018.

Веденяпин В.В. Курс вычислительной линейной алгебры. — М.: МГТУ им. Баумана, 2017.

Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.

Гринстед Р., Шерри Р. Вычислительная математика и линейная алгебра. — СПб.: Питер, 2010.

Watkins D.S. Fundamentals of Matrix Computations. — Wiley, 2010.

Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. — SIAM, 1997.

Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — SIAM, 2003.

Научные публикации (пример):

Metelev D. et al. Decentralized saddle-point problems with different constants of strong convexity and strong concavity //Computational Management Science. – 2024. – Т. 21. – №. 1. – С. 5. DOI 10.1007/s10287-023-00485-9

Pirau V. et al. Preconditioning meets biased compression for efficient distributed optimization //Computational Management Science. – 2024. – Т. 21. – №. 1. – С. 14. DOI 10.1007/s10287-023-00496-6

Lobanov A., Bashirov N., Gasnikov A. The “black-box” optimization problem: Zero-order accelerated stochastic method via kernel approximation //Journal of Optimization Theory and Applications. – 2024. – Т. 203. – №. 3. – С. 2451-2486. DOI 10.1007/s10957-024-02556-6

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Электронно-библиотечная система «Лань» (<https://e.lanbook.com>)

Национальная электронная библиотека (<https://rusneb.ru>)

Документация по библиотекам NumPy и SciPy (<https://numpy.org>, <https://scipy.org>)

Документация MATLAB (<https://www.mathworks.com/help/matlab/>)

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В образовательном процессе по дисциплине «Вычислительная линейная алгебра» используются современные информационные технологии, обеспечивающие как освоение теоретического материала, так и практическую отработку вычислительных методов.

Для выполнения лабораторных и проектных заданий применяется специализированное программное обеспечение: промышленные библиотеки линейной алгебры (BLAS, LAPACK), математические пакеты (MATLAB, Octave, Mathematica), а также open-source инструменты и языки программирования (Python с библиотеками NumPy, SciPy, JAX; Julia; C/C++).

В образовательном процессе используются облачные сервисы для выполнения вычислительных экспериментов (Google Colab, JupyterHub), системы управления версиями и хостинга Git-репозиториями (GitHub, GitLab), а также SAAS-платформы для организации совместной проектной работы, хакатонов и кейс-чемпионатов.

Студенты имеют доступ к электронным образовательным ресурсам (ЭБС «Лань», НЭБ), специализированным онлайн-справочникам и официальной документации по библиотекам и пакетам вычислительной линейной алгебры.

Применение данных информационных технологий обеспечивает интеграцию академического обучения с практико-ориентированной деятельностью, включая использование реальных кейсов промышленных партнёров.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические рекомендации позволяют студенту оптимальным образом организовать процесс обучения. В структуре учебного плана значительное время отводится на самостоятельное изучение данной дисциплины. В рабочей программе приведено примерное распределение часов аудиторной и внеаудиторной нагрузки по различным темам данной дисциплины.

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра математических основ управления
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Ю.П. Бибило, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная линейная алгебра» обучающийся должен:

знать:

- основные задачи, алгоритмы и теоремы вычислительной линейной алгебры.

уметь:

- применять алгоритмы вычислительной линейной алгебры;
- оценивать сложность и погрешность алгоритмов;
- реализовывать алгоритмы с помощью пакета Matlab.

владеть:

- навыком отыскания оптимального пути решения задачи;
- навыками оценки необходимых затрат машинного времени для решения поставленной задачи.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Решение систем линейных уравнений методом гауссова исключения (LU-разложение).
2. Оценка чисел обусловленности линейных систем.
3. Системы с симметрической матрицей и ленточные системы. Разложение Холесского.
4. Линейная задача наименьших квадратов. Методы отражений Хаусхолдера и вращений Гивенса. QR-разложение.
5. Линейная задача наименьших квадратов. Синглярное разложение.
6. Проблема отыскания собственных значений. Формы Хессенберга и Шура. Отыскание собственных векторов с помощью формы Шура.
7. Степенной метод и метод обратных итераций. Нахождение формы Шура методами ортогональных итераций и QR-итераций.
8. Отыскание собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы: метод «разделяй и властвуй» и метод Якоби.
9. Нахождение сингулярного разложения с помощью алгоритмов нахождения собственных значений и собственных векторов симметричных матриц.

10. Системы с неявно заданной матрицей. Крыловские подпространства. Методы Арнольди и Ланцоша. Решение системы с помощью крыловских подпространств.

11. Итеративные методы.

Критерии оценивания

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.

Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.